

圈正规化在高圈计算中的自恰性研究

黄达

合作者: 吴岳良
ITP/KITPC

April 3, 2011

- 1 圈正规化介绍
- 2 交缠发散结构的普遍讨论
- 3 Bjorken的Feynman图和电路图的类比思想
- 4 无有害发散定理的证明
- 5 ϕ^4 理论的两圈计算
- 6 无质量QED真空极化两圈计算
- 7 总结

当在量子场论进行微扰计算时，会遇到发散问题。因而需要修改积分在大动量处的行为，使发散积分暂时成为收敛的以方便数学处理，这一步称为“正规化”。比较流行的方法及问题有：

1. **Cut-off**: 保持发散的幂次行为但破坏洛伦兹对称性和规范对称性。
 2. **Pauli-Villars正规化**: 能保持Abel规范对称性，但破坏非Abel规范对称性。
 3. **维数正规化**:
 γ_5 不能很好处理，其严格依赖于4维时空。（包括轴矢反常、超对称、手征理论）不能保持发散的幂次行为。（一些有效场论中二次发散的幂次形式非常重要）
- 其它：格点、高阶协变导数、**Differential正规化**...

我们需要找到一种新的正规化方法，满足以下三个条件：

- a . 能保持场论的对称性（Lorentz对称性、规范对称性、SUSY等），能得到正确的反常项（轴矢反常、trace反常）。
- b . 能保持原始积分的发散幂次行为（对数发散、二次发散等等）。基本理论和有效理论都适用
- c . 尽量简单方便计算。

答案：圈正规化

基本思想: 引入不可约圈积分 (Irreducible Loop Integrals, 即ILI's) 的概念。

$$\begin{aligned} I_{-2\alpha} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mathcal{M}^2)^{2+\alpha}}, \\ I_{-2\alpha \mu\nu} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mathcal{M}^2)^{3+\alpha}}, \quad \alpha = -1, 0, 1, 2, \dots \\ I_{-2\alpha \mu\nu\rho\sigma} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \mathcal{M}^2)^{4+\alpha}} \end{aligned} \quad (1)$$

单圈积分经过Feynman参数化均可化为如上的1-fold ILI's, 因而正规化只需对ILI's进行 (与PV方法的区别。保持对称性。)

对于标量型ILI's正规化后的结果为:

$$\begin{aligned} I_2^R &= \frac{-i}{16\pi^2} \{M_c^2 - \mu^2 [\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_w + 1 + y_2(\frac{\mu^2}{M_c^2})]\} \\ I_0^R &= \frac{i}{16\pi^2} [\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_w + y_0(\frac{\mu^2}{M_c^2})] \end{aligned} \quad (2)$$

对于张量型ILI's满足以下的自恰性条件:

$$\begin{aligned} I_{2\mu\nu}^R &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} I_2^R, & I_{2\mu\nu\rho\sigma}^R &= \frac{1}{8} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) I_2^R, \\ I_{0\mu\nu}^R &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu} I_0^R, & I_{0\mu\nu\rho\sigma}^R &= \frac{1}{24} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) I_0^R \end{aligned} \quad (3)$$

可以证明, 自恰性条件在保持单圈的规范对称性和Ward恒等式中起关键作用。

- 非Abel规范理论: J. W. Cui and Y. L. Wu, Int. J. Mod. Phys. A **23**, 2861 (2008) [arXiv:0801.2199 [hep-ph]].
- 轴矢反常: Y. L. Ma and Y. L. Wu, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 6383 (2006) [arXiv:hep-ph/0509083].
- 超对称: J. W. Cui, Y. Tang and Y. L. Wu, Phys. Rev. D **79**, 125008 (2009) [arXiv:0812.0892 [hep-ph]].
- 引力对规范作用的修正: Y. Tang and Y. L. Wu, arXiv:0807.0331 [hep-ph].

考虑到圈正规化在一圈时的成功，下一步自然的问题是：

是否能将圈正规化推广到两圈甚至更高圈的计算中？

答案：能！

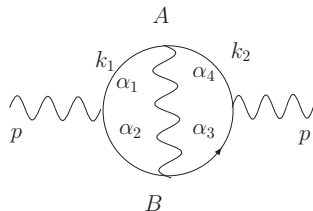


Figure 1:

标准教科书告诉我们：此图的发散结构是：

- a 两个发散的子图，分别对应与左右的顶点修正，且都是对数发散
- b 一个整体图形的发散，为平方发散（单纯通过数图的发散幂次）

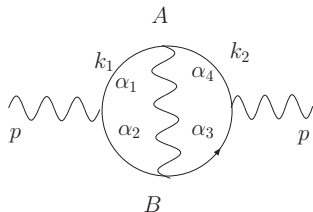


Figure 2:

但是，当实际计算时，我们发现该图只有2个圈动量：

k_1 积分：对数发散，对应于左边子图的顶点修正

k_2 积分：平方发散，对应于整体图形的积分

问题：右边子图的顶点修正发散哪去了？

同时，我们还发现：在Feynman积分中存在着对数发散，可以贡献右边子图的UV发散。

结论：交缠发散结构使得UV发散通过正常的参数化转移到了Feynman参数的积分中。

进一步的问题：如何将“藏”在Feynman参数中的发散从参数空间的积分中提取出来？

答案：我们发现Bjorken的Feynman图和电路图的类比思想是解决这一问题的有效工具！



Figure 3: Analogue of Feynman diagrams and electrical circuit diagrams

定量上，存在着以下类比：

Feynman图 \Leftrightarrow 电路图
坐标 $x_j \Leftrightarrow$ 电压
Feynman参数 $\alpha_i \Leftrightarrow$ 电阻
UVDP参数 $v_i \Leftrightarrow$ 电导
自由粒子运动方程 \Leftrightarrow 欧姆定律

其中，Feynman参数与UVDP参数的关系是： $\alpha_i = \frac{1}{1+v_i}$

Feynman图版本的Kirchhoff定律

(a) 对于每一个顶角 j :

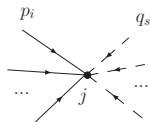


Figure 4: (a) 顶点 j 的电流守恒

动量守恒定律: $\sum_{p_i, q_s \text{ entering vertex } j} (p_i + q_s) = 0$

(b) 对于每一条回路 r :

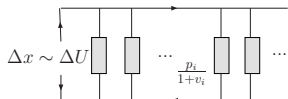


Figure 5: (b) 回路 r 的电压降守恒

$$\sum_{p_i \text{ in loop } r} \frac{p_i}{1 + v_i} = 0 \quad (4)$$

注意: 方程(4)对应于将一般的圈积分转化为两阶的不可约圈积分 (2-fold ILI's) 的条件。

例子

当把Bjorken的类比思想用于实际的计算时，我们能够很容易的看出Feynman参数空间中的积分发散区域所对应的原Feynman图中圈动量积分的发散区域。比如：

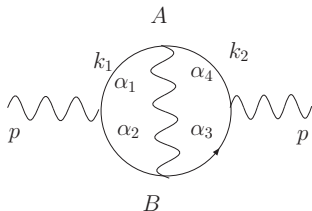


Figure 6:

在实际计算时，我们发现：

Region a . $\alpha_3 + \alpha_4 \rightarrow 0$ 时，存在着对数发散，使用Bjorken的与电路图类比的思想，即表明线3和线4上的电阻趋向于零，这就意味着在A和B点间电压降固定的情况下，有很大的电流在线3和线4上流过，从而导致短路。转换为Feynman图的语言，即发散来源于右边子图中圈动量趋向于无穷大时的行为，也就是紫外(UV)发散。——这就是我们要找的右边子图的顶角发散

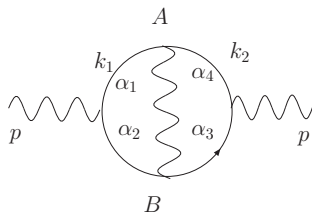


Figure 7:

Region b . $\alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 0$ 时, 同样存在着对数发散。如上所述, 使用Bjorken的与电路图类比的思想, 我们知道该发散来源于左边子图中圈动量趋向于无穷大时的行为, 同样也是紫外发散。

有害发散(Harmful Divergence or Nonlocal Divergence):

形如 $M_c^2 \cdot \log(-p^2)$ 、 $\log M_c^2 \cdot \log(-p^2)$ 的发散, 不能被局域的抵消项 (local counter-terms) 所抵消, 只能通过与相应的抵消项插入图中相同的项相抵消。

根据't Hooft和Veltman, 由于所有两圈图所对应的Feynman积分都可以化为 $\alpha\beta\gamma$ 积分的和, 因而只需讨论 $\alpha\beta\gamma$ 积分的有害发散的抵消问题。

$\alpha\beta\gamma$ 积分的定义:

$$I_{\alpha\beta\gamma} = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_1^2 - m_1^2)^\alpha (k_2^2 - m_2^2)^\beta [(k_1 - k_2 + p)^2 - m_3^2]^\gamma} \quad (5)$$

其中, α, β, γ 均大于0。

上述 $\alpha\beta\gamma$ 积分可图形表示为:

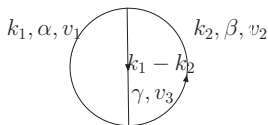


Figure 8: $\alpha\beta\gamma$ diagram

无有害发散定理

由 $\alpha\beta\gamma$ 积分的定义及其图形表示可知, 该积分包含**3**个子积分和**1**个总积分。其中, **3**个子积分可图形表示为:

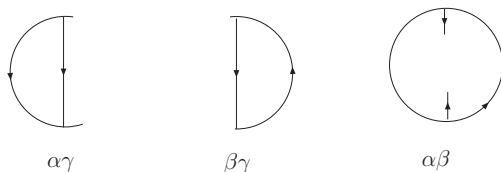


Figure 9: subdivergences

因而我们需要考虑如下相对应的**3**张单圈抵消项插入图。

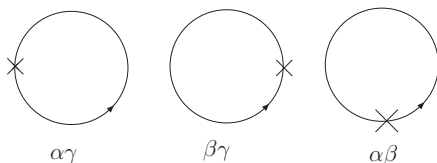


Figure 10: subtraction diagrams

对于上述普遍的 $\alpha\beta\gamma$ 积分，通过UVDP参数化，平移积分动量 \mathbf{k}_1 并且积掉圈动量 \mathbf{k}_1 ，可以得到下式：

$$I_{\alpha\beta\gamma} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \prod_{j=1}^3 \frac{dv_j}{(1+v_j)^2} \delta(1 - \sum_{j=1}^3 \frac{1}{1+v_j}) F(v_j) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \mathcal{M}^2(p^2, m_j^2, v_j)]^{\alpha+\beta+\gamma-2}} \quad (6)$$

其中，

$$\mathcal{M}^2 = \frac{(1+v_1)^2(1+v_2)^2(1+v_3)^2}{(3+v_1+v_2+v_3)^2} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{m_j^2}{1+v_j} - \frac{1}{3+v_1+v_2+v_3} p^2 \right] \quad (7)$$

$$F(v_j) = \frac{[(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)]^{2(\alpha+\beta+\gamma-3)}}{(1+v_1)^{\alpha-1}(1+v_2)^{\beta-1}(1+v_3)^{\gamma-1}(3+v_1+v_2+v_3)^{2(\alpha+\beta+\gamma-3)}} \quad (8)$$

通过数发散幂次可知，只有**2种**情况会涉及到有害发散，（1） $\alpha = \gamma = 1, \beta = 2$ 和（2） $\alpha = \beta = \gamma = 1$ 。下面，我们将分情况讨论。

情况1. $\alpha = \gamma = 1, \beta = 2$

此时，该图中最大的发散幂次只能是对数发散。上述普遍的表达式可化简为：

$$\begin{aligned}
 I_{121} &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty \prod_{i=1}^3 dv_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1+v_i}) \frac{1}{(3+v_1+v_2+v_3)^2(1+v_2)} \\
 &\quad \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \mathcal{M}(p^2, m_i^2, v_i)]^2} \\
 &= -\frac{1}{(16\pi^2)^2} \int_0^\infty \prod_{i=1}^3 dv_i \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1+v_i}) \frac{1}{(3+v_1+v_2+v_3)^2(1+v_2)} \\
 &\quad (\ln \frac{M_c^2}{M_s^2} - \gamma_\omega + y_0(\frac{M_s^2}{M_c^2}))
 \end{aligned} \tag{9}$$

其中， $M_s^2 = M^2 + \mu_s^2$ ， $y_0(x)$ 满足性质 $y_0(x) \rightarrow 0$ 当 $x \rightarrow 0$ 时。

我们发现，在UVDP参数空间区域 $v_1 \rightarrow \infty, v_3 \rightarrow \infty$ 中存在着对数发散，由Bjorken的类比，我们知道此发散来自于子积分 $\alpha\gamma$ 。

为提出发散，在此积分区域我们可以取下列近似：

积分区域限制在 $v_1 > V, v_3 > V, v_2 \rightarrow 0$, 其中, V 很大。此时, 积分测度变为 $\int_V^\infty dv_1 \int_V^\infty dv_3 \int_0^\infty dv_2$ 。同时, M 趋向于 $\frac{(1+v_1)^2(1+v_3)^2}{(v_1+v_3)^2} m_2^2$ 。于是, 上述积分进一步化简为:

$$\begin{aligned}
 I_{121} &\sim -\frac{1}{(16\pi^2)^2} \int_V^\infty dv_1 \int_V^\infty dv_3 \int_0^\infty dv_2 \delta\left(1 - \frac{1}{1+v_2}\right) \\
 &\quad \frac{1}{(v_1+v_3)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{\frac{(1+v_1)^2(1+v_3)^2}{(v_1+v_3)^2} m_2^2} - \gamma_\omega \right) \\
 &\sim -\frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{m_2^2} - \gamma_\omega + y_0 \left(\frac{m_2^2}{M_c^2} \right) \right) \int_V^\infty dv_1 \frac{1}{v_1+V} + \dots \quad (10)
 \end{aligned}$$

结果为:

$$I_{121} \sim -\frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{-2q_0^2 V} - \gamma_\omega + y_0 \left(\frac{-2q_0^2 V}{M_c^2} \right) \right) \cdot \left(\ln \frac{M_c^2}{m_2^2} - \gamma_\omega + y_0 \left(\frac{m_2^2}{M_c^2} \right) \right) \quad (11)$$

该双log区域所对应的单圈抵消项插入图 ($\alpha\gamma$) 表达式为:

$$I_{121}^{s(\alpha\gamma)} = - \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_2^2 - m_2^2)^2} \text{DP} \left\{ \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_1^2 - m_1^2)[(k_1 - k_2 + p)^2 - m_3^2]} \right\} \quad (12)$$

其中, DP表示仅取发散部分。

计算结果为:

$$I_{121}^{s(\alpha\gamma)} = + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \cdot \left(\ln \frac{M_c^2}{m_2^2} - \gamma_\omega + y_0 \left(\frac{m_2^2}{M_c^2} \right) \right) \quad (13)$$

对比两式, 当 $\mu^2 = -2q_0^2 V$, 两式可以精确相消, 于是可见, 有害发散抵消了。

情况2. $\alpha = \beta = \gamma = 1$

此时最大发散为平方发散。

$$\begin{aligned}
 I_{111} &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty \prod_{i=1}^3 \frac{dv_i}{(1+v_i)^2} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1+v_i}\right) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 - \mathcal{M}^2(p^2, m_i^2, v_i)} \\
 &= \frac{1}{(16\pi^2)^2} \int_0^\infty \prod_{i=1}^3 \frac{dv_i}{(1+v_i)^2} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1+v_i}\right) \\
 &\quad \left[\mathcal{M}_c^2 - \mathcal{M}_s^2 \left(\ln \frac{\mathcal{M}_c^2}{\mathcal{M}_s^2} - \gamma_\omega + 1 + y_2\left(\frac{\mathcal{M}_s^2}{\mathcal{M}_c^2}\right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

其中,

$$\mathcal{M}_s^2 = \mathcal{M}^2 + \mu_s^2 \tag{15}$$

以及, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y_2(x) \rightarrow 0$ 。

由Bjorken类比，我们有如下对应：

subdivergence \Leftrightarrow *divergent region in UVDP space*

$$(1) \alpha\gamma \text{ divergence} \Leftrightarrow v_1 \rightarrow \infty, v_3 \rightarrow \infty, v_2 \rightarrow 0, \quad (16)$$

$$(2) \beta\gamma \text{ divergence} \Leftrightarrow v_2 \rightarrow \infty, v_3 \rightarrow \infty, v_1 \rightarrow 0, \quad (17)$$

$$(3) \alpha\beta \text{ divergence} \Leftrightarrow v_1 \rightarrow \infty, v_2 \rightarrow \infty, v_3 \rightarrow 0 \quad (18)$$

通过分情况讨论，我们同样可以证明上述区域的UVDP参数中的发散可以被相应的抵消项插入图所抵消。

我们可得以下的**无有害发散定理**：

无有害发散定理：对于普遍的标量双圈 $\alpha\beta\gamma$ 积分，当与相应的单圈抵消项插入图相加后，只剩下无害发散。

上述定理保证了圈正规化在两圈计算中的应用。

ϕ^4 理论的拉氏量为：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (19)$$

通过数发散幂次，我们知道只有 ϕ^4 理论两点 and 四点的格林函数存在着发散，分别对应于该理论中的粒子的自能修正和顶点修正。



Figure 11:

自能修正：

$$\begin{aligned}
 -iM_1^2 &= -i\lambda \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &= -\frac{i\lambda}{2(4\pi)^2} [M_c^2 - m^2(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega + 1)]
 \end{aligned} \tag{20}$$

顶角修正：

$$\begin{aligned}
 -i\Lambda_1 &= 3 \cdot \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \\
 &= \frac{3i\lambda^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx [\ln \frac{M_c^2}{m^2 - x(1-x)p^2} - \gamma_\omega]
 \end{aligned} \tag{21}$$

由于圈正规化方法保持了理论的发散行为，所以对于有平方发散的圈积分，我们无法给出质量无关的重正化方案。

适用于圈正规化的重正化方案：

对于平方发散 M_C^2 ，减去 $M_C^2 - \mu^2$ ，从而在有限项中留下重正化标度 μ^2

对于对数发散 $\ln \frac{M_C^2}{M^2} - \gamma_\omega$ ，减去 $\ln \frac{M_C^2}{\mu^2} - \gamma_\omega$ ，从而在有限项中留下 $\ln \frac{\mu^2}{M^2}$

注意：以上的重正化方案非常类似于维数正规化中的 \overline{MS} 方案，但是区别在于对于平方发散的處理。

在以上的重正化方案下，我们得到单圈时的抵消项和相应的修正：
自能修正：

$$-iM_{1r}^2 = -\frac{i\lambda}{2(4\pi)^2} [(\mu^2 - m^2) - m^2 \ln \frac{\mu^2}{m^2}] \quad (22)$$

顶角修正：

$$-i\Lambda_{1r} = \frac{3i\lambda^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \ln \frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \quad (23)$$

抵消项：

$$-i\delta_m^{(1)} = \frac{i\lambda}{2(4\pi)^2} [(M_c^2 - \mu^2) - m^2 (\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega)] \quad (24)$$

$$i\delta_Z^{(1)} = 0 \quad (25)$$

$$-i\delta_\lambda^{(1)} = -\frac{3i\lambda^2}{2(4\pi)^2} [\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega] \quad (26)$$

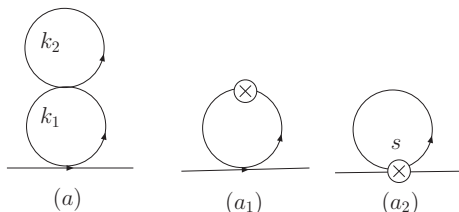


Figure 12:

(a)图的贡献为:

$$-iM_2^{(a)} = \frac{1}{4} \frac{i\lambda^2}{(16\pi)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega \right) \cdot \left[M_c^2 - m^2 \left(\frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega + 1 \right) \right] \quad (27)$$

单圈抵消项插入图(a₁) + (a₂)的贡献为

$$\begin{aligned} -iM_2^{(a_1)+(a_2)} &= -\frac{1}{4} \frac{i\lambda^2}{(16\pi)^2} \left\{ \left[(M_c^2 - \mu^2) - m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \right] \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \cdot \left[M_c^2 - m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega + 1 \right) \right] \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

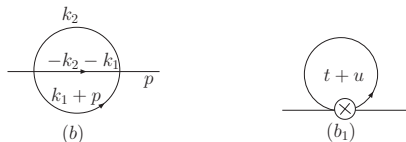


Figure 13:

$$\begin{aligned}
 -iM_2^{(b)} &= \frac{i\lambda^2}{6(16\pi^2)^2} \left[\frac{1}{2} M_c^2 - 3m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega \right)^2 - 4m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} p^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{-p^2} - \gamma_\omega \right) \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{29}$$

单圈抵消项插入图(b₁)的贡献为

$$\begin{aligned}
 -iM_2^{(b_1)} &= (-i\delta_\lambda^{t+u}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &= -\frac{i\lambda^2}{(16\pi^2)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \left[M_c^2 - m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega + 1 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{30}$$

如果我们定义两圈的质量及波函数的整体抵消项为:

$$\begin{aligned}
 -i\delta_m^{(2)} &= -\frac{i\lambda^2}{(16\pi^2)^2} \left[-M_c^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) - \frac{1}{4} (M_c^2 - \mu^2) \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) + \frac{1}{12} (M_c^2 - \mu^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right)^2 + \frac{7}{12} m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \right] \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$i\delta_Z^{(2)} = -\frac{i\lambda^2}{12(16\pi^2)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \quad (32)$$

则将(a)和(b)图的结果合起来, 我们得到在两圈时 ϕ^4 理论的重正化后的自能修正为

$$\begin{aligned}
 -iM_{2r}^2 &= \frac{i\lambda^2}{(16\pi^2)^2} \left[\frac{1}{4} (\mu^2 - m^2) \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{1}{12} \mu^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4} m^2 \left(\ln \frac{\mu^2}{m^2} \right)^2 - \frac{11}{12} m^2 \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{1}{12} p^2 \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right] + \dots \quad (33)
 \end{aligned}$$

在 $m^2 = \mu^2 \rightarrow 0$ 的特殊极限下, 上述结果与Peskin 和Schroeder 书345页的结果相同。

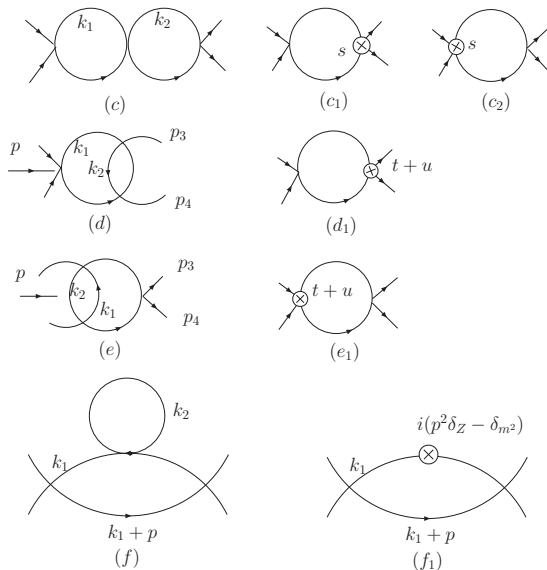


Figure 14:

组(c):

$$-i\Lambda_2^{(c)} = -\frac{i\lambda^3}{4(16\pi^2)^2} \left[\int_0^1 dx \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2 - x(1-x)p^2} - \gamma_\omega \right) \right]^2 \quad (34)$$

$$-i\Lambda_2^{(c1)+(c2)} = \frac{i\lambda^3}{2(16\pi^2)^2} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \left[\int_0^1 dx \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2 - x(1-x)p^2} - \gamma_\omega \right) \right] \quad (35)$$

组(d):

$$-i\Lambda_2^{(d)} \sim -\frac{i\lambda^3}{2 \cdot (16\pi^2)^2} \int_0^1 dx \left[\left(\ln \frac{M_c^2}{m^2 - x(1-x)p^2} - \gamma_\omega \right)^2 + \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2 - x(1-x)p^2} - \gamma_\omega \right) \right] + \dots \quad (36)$$

$$-i\Lambda_2^{(d1)} = \frac{i\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \int_0^1 dx \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2 - x(1-x)p^2} - \gamma_\omega \right) \quad (37)$$

组(f):

$$-i\Lambda_2^{(f)} = -\frac{i\lambda^3}{2(16\pi^2)^2} \left[M_c^2 - m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{m^2} - \gamma_\omega + 1 \right) \right] \int_0^1 dx \frac{1-x}{m^2 - x(1-x)p^2} \quad (38)$$

$$-i\Lambda_2^{(f1)} = \frac{i\lambda^3}{2(16\pi^2)^2} \left[(M_c^2 - \mu^2) - m^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \right] \int_0^1 dx \frac{1-x}{m^2 - x(1-x)p^2} \quad (39)$$

如果定义顶角的两圈整体抵消项为:

$$-i\delta_\lambda^{(2)} = \frac{i\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left[-\frac{15}{4} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right)^2 + 3 \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega \right) \right] \quad (40)$$

则s-道的重正化后的两圈顶点修正为:

$$\begin{aligned} -i\Lambda_{2r}^s &= -\frac{i\lambda^3}{(16\pi^2)^2} \left\{ \frac{1}{4} \left[\int_0^1 dx \ln \frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right]^2 \right. \\ &\quad + \int_0^1 dx \left[\left(\ln \frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right)^2 + \ln \frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[(\mu^2 - m^2) - m^2 \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right] \int_0^1 dx \frac{1-x}{m^2 - x(1-x)p^2} \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

ϕ^4 理论: 耦合常数的重正化群方程

由于我们已经求得了两圈所有抵消项, 我们可以自然得到近似到两圈的重正化群方程。定义重正化后的耦合常数为:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0(1 + 2\delta_Z) - \delta_\lambda \\ &\approx \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{2 \cdot (16\pi^2)} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega\right) - \frac{\lambda_0^3}{(16\pi^2)^2} \left[\frac{15}{4} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega\right)^2 - \frac{17}{6} \left(\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega\right)\right]\end{aligned}\quad (42)$$

β_λ 近似到两圈的结果为:

$$\begin{aligned}\beta_\lambda &= \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \\ &= \frac{3\lambda_0^2}{16\pi^2} - \frac{2\lambda_0^3}{(16\pi^2)^2} \frac{17}{6} \\ &\approx \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - \frac{17}{3} \frac{\lambda^3}{(16\pi^2)^2}\end{aligned}\quad (43)$$

定义重正化后的质量为:

$$\begin{aligned}m^2 &= Z_\phi m_0^2 - \delta_{m^2} = m_0^2 + m_0^2 \delta_Z - \delta_{m^2} \\&= m_0^2 - \frac{\lambda_0^2}{12(16\pi^2)^2} m_0^2 (\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega) + \frac{\lambda_0}{2(16\pi^2)} [(M_c^2 - \mu^2) - m_0^2 (\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega)] \\&\quad + \frac{\lambda_0^2}{(16\pi^2)^2} [M_c^2 (\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega) + \frac{1}{4} (M_c^2 - \mu^2) (\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega) - \frac{1}{12} (M_c^2 - \mu^2) \\&\quad - \frac{1}{2} m_0^2 (\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma_\omega)^2 + \frac{7}{12} m_0^2 (\ln \frac{M_c^2}{\mu^2} - \gamma)]\end{aligned}\tag{44}$$

质量的重正化群方程 β_{m^2} 为:

$$\begin{aligned}\beta_{m^2} &= \mu \frac{dm^2}{d\mu} \\&= -\frac{\lambda_0}{16\pi^2} (\mu^2 - m_0^2) + \frac{\lambda_0^2}{(16\pi^2)^2} (\frac{1}{6} \mu^2 - m_0^2) \\&\approx -\frac{\lambda}{16\pi^2} (\mu^2 - m^2) + \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} (\frac{1}{6} \mu^2 - m^2)\end{aligned}\tag{45}$$

目的:

1. 由于圈正规化对于张量形式的不可约圈积分 (**tensor-type ILI's**) 涉及到非平庸的自恰条件, 因而我们需要验证这些关系在两圈时依然成立;
2. 通过计算无质量QED理论的两圈真空极化图, 可以明显的验证圈正规化在两圈时依然可以保证规范理论的规范对称性和其对应的Ward恒等式。

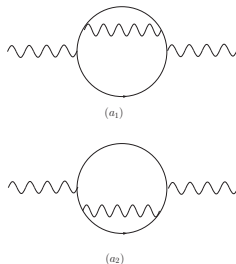


Figure 15:

$$\begin{aligned}
 (a_1) = & \frac{4ie^4}{(16\pi^2)^2} \left\{ g^{\mu\nu} M_c^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) + (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \cdot \left[\frac{1}{3} \left(\ln \frac{M_c^2}{-p^2} - \gamma_\omega \right) \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) \right. \right. \\
 & - \frac{5}{18} \left(\ln \frac{M_c^2}{-p^2} - \gamma_\omega \right) + \frac{11}{9} \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) - \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{dv_2}{1+v_2} \ln(1+v_2) - \frac{17}{12} + \frac{\pi^2}{18} \left. \right] \\
 & \left. + g^{\mu\nu} p^2 \left[\frac{1}{6} \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) - \frac{5}{36} \right] \right\} \quad (46)
 \end{aligned}$$

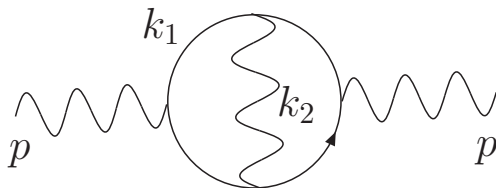


Figure 16:

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \sim -\frac{8ie^4}{(16\pi^2)^2} \left\{ g^{\mu\nu} M_c^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) + (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \cdot \right. \\
 & \left[\frac{1}{3} \left(\ln \frac{M_c^2}{-p^2} - \gamma_\omega \right) \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) + \frac{19}{18} \left(\ln \frac{M_c^2}{-p^2} - \gamma_\omega \right) \right] - \frac{1}{3} \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) \\
 & \left. + \frac{1}{3} \left[\frac{13}{6} \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2(1+V)} - \gamma_\omega \right) - \int_V^\infty \frac{dv_1}{1+v_1} \ln(1+v_1) \right] + \frac{1}{6} g^{\mu\nu} p^2 \left(\ln \frac{M_c^2}{-q_0^2} - \gamma_\omega \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{47}$$

上述两式相加后，并且取 $-q_0^2 = -p^2$ (因为 p^2 是该图中的唯一量纲)，得到结果：

$$2(a) + (b) \sim \frac{i\alpha^2}{4\pi^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \left(\ln \frac{M_c^2}{-p^2} - \gamma_\omega \right) \quad (48)$$

其中， α^2 是精细结构常数。

小结:

1. 从以上的结果可见，平方发散抵消掉了。说明光子没有质量量子修整，这从一方面保证理论的规范对称性；
2. 有害发散自动抵消了；
3. 我们的结果中光子的极化是横向的，这就保证了理论的Ward恒等式及其规范对称性，从而其局域的对数发散能够被理论中相应的抵消项所抵消；
4. 结果与其他作者的结果相同（比如：**Bjorken** 和**Drell**的书）

圈正规化在高圈应用中的一般步骤

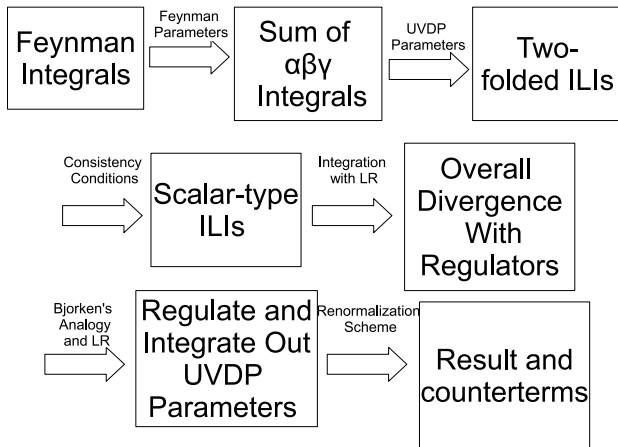


Figure 17: General procedure of LR to multiloop regularization method

- 1. 为了在圈正规化中正确处理交缠发散，尤其是计算和确认“藏”在参数空间的紫外发散，我们发现Bjorken的Feynman图与电路图类比的思想是一个有效的工具。
- 2. 利用Bjorken的Feynman图与电路图类比的思想，我们在圈正规化中证明了无有害发散定理，保证了圈正规化在两圈及更高圈计算中的应用。
- 3. 我们还分别计算了 ϕ^4 理论的两圈的自能修正和顶角修正，以及QED两圈的真空极化修正，得到了与标准一致的结果，证明了圈正规化在高圈（至少在两圈）计算中的自恰性。
- 4. 我们给出了圈正规化在高圈应用时的一般性的步骤。

谢谢!